Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задача

По курсу

“ Случайные процессы ”

Выполнил:

Смелов Д. В., 412 гр.

Москва, 2007 г.

Задача

Пусть X_t - стационарный в широком смысле, непрерывный в среднем квадратичном процесс. $F(t) = E|X_t - EX_0|^2$ при $t \geq 0$, $F(t) = -E|X_t - EX_0|^2$ при $t \leq 0$. Доказать, что $F(t)$ непрерывна.

Решение

Рассмотрим функцию $F(t)$ при некотором произвольном $t > 0$.

$F(t) = E|X_t - EX_0|^2 = E(X_t - EX_0)(\overline{X_t} - \overline{EX_0}) = E(X_t - EX_t + EX_t - EX_0)(\overline{X_t} - \overline{EX_t} + \overline{EX_t} - \overline{EX_0}) = E(X_t - EX_t)(\overline{X_t} - \overline{EX_t}) + E(X_t - EX_t)(\overline{EX_t} - \overline{EX_0}) + E(EX_t - EX_0)(\overline{X_t} - \overline{EX_t}) + E(EX_t - EX_0)(\overline{EX_t} - \overline{EX_0})$.

Первое слагаемое в данном разложении - ковариационная функция $K(t,t)$, второе и третье равны нулю:

$E(X_t - EX_t)(\overline{EX_t} - \overline{EX_0}) = (\overline{EX_t} - \overline{EX_0})E(X_t - EX_t) = (\overline{EX_t} - \overline{EX_0})(EX_t - E(EX_t)) = 0$

$E(EX_t - EX_0)(\overline{X_t} - \overline{EX_t}) = (EX_t - EX_0)E(\overline{X_t} - \overline{EX_t}) = (EX_t - EX_0)(E\overline{X_t} - E\overline{EX_t}) = 0$

Четвертое слагаемое $E|EX_t - EX_0|^2$ суть непрерывная функция от EX_t, а EX_t - непрерывна в точке t по критерию непрерывности в среднем квадратичном $\Rightarrow$ $|EX_t - EX_0|^2$ - непрерывна в точке t. Обозначим эту функцию как $G(t)$.

Получаем: $F(t) = K(t,t) + G(t)$. Так как процесс стационарный, корреляционная функция зависит только от разности между ее аргументами, т.е. $K(t,t) = K(0)$ - некоторая константа, $\Rightarrow F(t) = K(0) + G(t), \forall t \geq 0$, и $F(t)$ непрерывна.

Аналогично, $F(t) = -K(0) - G(t), \forall t \leq 0$.

Исследуем непрерывность в точке $t = 0$. По условию задачи имеем: $F(0) = |EX_t - EX_0|^2 = -|EX_t - EX_0|^2 \Rightarrow |EX_t - EX_0|^2 = -|EX_t - EX_0|^2 = 0$. Так как $F(0) = K(0) + G(0) = -K(0) - G(0)$, а $G(0)$ очевидно равна нулю, имеем: $K(0) = -K(0)$. Следовательно, $F(t)$ непрерывна в нуле при $K(0) = 0$.